08/11/2018

8β) Αν X, Y μη κενά σύνολα και ισχύει $(X \times Y) \cup (Y \times X) \subseteq A \times A$

ΝΔΟ $X \cup Y \subseteq A$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Εφόσον $X \neq \emptyset$ υπάρχει $\alpha \in X$

$Y \neq \emptyset$ υπάρχει $\beta \in Y$

Δείχνουμε πρώτα ότι $X \subseteq A$.

Έστω τυχόν x

Αν $x \in X$

Τότε $(x, b) \in X \times Y$

άρα $(x, b) \in (X \times Y) \cup (Y \times X)$

άρα από υπόθεση $(x, b) \in A \times A$

άρα $x \in A$ (και $b \in A$)

Άρα $X \subseteq A$. (1)

Δείχνουμε ότι $Y \subseteq A$.

Έστω τυχόν x

Αν $x \in Y$

Τότε $(a, x) \in X \times Y$

άρα $(a, x) \in (X \times Y) \cup (Y \times X)$

άρα από υπόθεση $(a, x) \in A \times A$

άρα ($a \in A$ και) $x \in A$

Άρα $Y \subseteq A$ (2)

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $X \cup Y \subseteq A$

γ) Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) η υπόθεση ότι τα X, Y είναι μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.

Θέτουμε $X = \varnothing$, $Y = \{1, 2\}$ $A = \{1\}$ τότε $(X \times Y) \cup (Y \times X) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \subseteq A \times A$.

ενώ $X \cup Y = Y = \{1, 2\}$ δεν είναι υποσύνολο του A.

δ) Αν $A \times A \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X)$ νδο. $A \subseteq X \cap Y$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω τυχόν α.
Αν $\alpha \in A$ τότε $(\alpha,\alpha) \in A\times A$ άρα (εφόσον $A\times A \subseteq (X\times Y)\cup(Y\times X)$)
Προκύπτει ότι $(\alpha,\alpha) \in (X\times Y)\cup(Y\times X) \Leftrightarrow (\alpha,\alpha)\in X\times Y$ ή
$(\alpha,\alpha) \in Y\times X \Rightarrow (\alpha\in X$ και $\alpha \in Y)$ ή $(\alpha\in Y$ και $\alpha\in X)$
$\Leftrightarrow \alpha\in X$ και $\alpha\in Y \Rightarrow \alpha \in X\cap Y$
Άρα $A \subseteq X\cap Y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(5) Στο σύνολο $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ των φυσικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής: $\alpha \sigma b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}\ \ 2b = k\cdot\alpha$
$\left(\Leftrightarrow \frac{2b}{\alpha} \in \mathbb{N}\right)$

Για κάθε $x\in\mathbb{N}$ ισχύει $\frac{2x}{x} = 2\in\mathbb{N}$ άρα $x\sigma x$
Άρα η σ είναι αυτοπαθής.
$1\sigma 4$ (διότι $\frac{2\cdot 4}{1} = 8 \in\mathbb{N}$)

ενώ
$4 \not\sigma 1$ (διότι $\frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)
Άρα η σ δεν είναι συμμετρική.

$1\sigma 2$ (διότι $\frac{2\cdot 2}{1} = 4\in\mathbb{N}$)
$2\sigma 1$ (διότι $\frac{2\cdot 1}{2} = 1 \in\mathbb{N}$)
ενώ $1\neq 2$. Άρα η σ δεν είναι αντισυμμετρική.

$4 \sigma 2$ (διότι $\frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \in \mathbb{N}$)

$2 \sigma 1$ (διότι $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \in \mathbb{N}$)

ενώ

$4 \not\sigma 1$ (διότι $\frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

Άρα η σ δεν είναι μεταβατική.

6) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής

$x \sigma y \Leftrightarrow \exists \kappa \in \mathbb{Z} \quad y = 2\kappa x$

$\Leftrightarrow \left[y = x = 0 \text{ ή } \left(x \neq 0 \text{ και } \frac{y}{2x} \in \mathbb{Z} \right) \right]$

Αν $1 \sigma 1$ τότε $\exists \kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε $1 = 2\kappa 1$

δηλ. $\exists \kappa \in \mathbb{Z}$ $\kappa = \frac{1}{2}$ άτοπο άρα $1 \not\sigma 1$.

Συνεπώς η σ δεν είναι αυτοπαθής.

$1 \sigma 8$ (διότι $8 = 2 \cdot 4 \cdot 1$, με $4 \in \mathbb{Z}$)

ενώ

$8 \not\sigma 1$ (διότι αν $8 \sigma 1$ θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ $1 = 2\kappa \cdot 8$ άρα $\frac{1}{16} \in \mathbb{Z}$ άτοπο)

Άρα η σ δεν είναι συμμετρική.

Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \sigma y$ και $y \sigma x$ άρα $\left.\begin{array}{l} \exists \kappa \in \mathbb{Z} \quad y = 2\kappa x \\ \text{και} \quad \exists \lambda \in \mathbb{Z} \quad x = 2\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow$

$x = 2\lambda(2\kappa x) \Rightarrow (4\kappa\lambda - 1)x = 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda = \frac{1}{4}$ ή $x = 0$

απορ.

Εφόσον $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa\lambda \in \mathbb{Z}$ άρα δεν ισχύει ότι $\kappa\lambda = \frac{1}{4}$ άρα

$x = 0$.

Εφόσον $y = 2\kappa x \overset{x=0}{\Rightarrow} y = 0$.

Άρα $x = y$

Άρα η σ είναι αντισυμμετρική.

Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \sigma y$ και $y \sigma z$. Τότε $\exists k \in \mathbb{Z}$ ώστε $y = 2kx$
$\exists \lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε $z = 2\lambda y$
Τότε $z = 2\lambda(2kx) = 2(2k\lambda)x$, με $2k\lambda \in \mathbb{Z}$
δηλαδή $x \sigma z$
Επομένως, η σ είναι μεταβατική.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο Ε λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική.

Συνήθως (αλλά όχι πάντα) συμβολίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας με "$\sim$".
Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο Ε και $a \in E$ το σύνολο $\{x \in E \quad x \sim a\}$ λέγεται κλάση ισοδυναμίας του a. και συμβολίζεται με $[a]$ (ή $[a]_\sim$ ή $\kappa\lambda_\sim(a)$)

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ λέγεται σύνολο πηλίκο και συμβολίζεται με $E/\sim$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής
$x \sim y \Leftrightarrow$ ο $x - y$ είναι άρτιος
$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = 2k)$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας
Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας;

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα σύνολα των αρτίων και των περιττών

$\mathbb{Z}/\sim = \{A, B\}$ A = σύνολο αρτίων
B = σύνολο περιττών

(2) Στο σύνολο E των ευθειών του επιπέδου ορίζουμε τη σχέση $x \parallel y \Leftrightarrow$ η ευθεία x ταυτίζεται με την y ή είναι παράλληλη με την y
Εύκολα προκύπτει ότι η $\parallel$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε δέσμη παράλληλων ευθειών αποτελεί μια κλάση ισοδυναμίας της $\parallel$ στο E.

(3) Αν $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.
$A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος ώστε $A = P^{-1}BP$
Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας

(4) Στο σύνολο X όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών ορίζουμε τη σχέση $\sim$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim(b_n - a_n) = 0$

(5) Αν X το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής: $f \sim g \Leftrightarrow$ Η $f - g$ είναι συνεχής.
Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(6) Αν X ένας διανυσματικός χώρος και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X.
Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$
Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $E \neq \phi$

(A) Αν ~ μια σχέση ισοδυναμίας στο E τότε

(i) $[\alpha] \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in E$

(ii) $\forall \alpha, b \in E$ $\alpha \sim b \Leftrightarrow [\alpha] = [b]$

(iii) Αν $\alpha, b \in E$, $\alpha \not\sim b \Leftrightarrow [\alpha] \cap [b] = \phi$

$[\alpha] = \{ x \in E \ \ x \sim \alpha \}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(i) $\forall \alpha \in E$ ισχύει $\alpha \sim \alpha$ (αφού ~ αυτοπαθής)

άρα $\alpha \in [\alpha]$

Συνεπώς $[\alpha] \neq \phi$

(ii) Έστω $\alpha, b \in E$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim b$. Για τυχόν x αν $x \in [\alpha]$ ισχύει $x \sim \alpha$

Εφόσον $\alpha \sim b$ και η ~ είναι μεταβατική προκύπτει ότι

$x \sim b$ άρα $x \in [b]$.

Δείξαμε ότι $[\alpha] \subseteq [b]$

Αν $x \in [b]$ τότε $x \sim b$

Εφόσον $\alpha \sim b$ και η ~ είναι συμμετρική έχουμε $b \sim \alpha$.

και εφόσον η ~ είναι μεταβατική

Προκύπτει $x \sim \alpha$

Δείξαμε $[b] \subseteq [\alpha]$

Συνεπώς $[\alpha] = [b]$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $[\alpha] = [b]$

$\alpha \in [\alpha] \Rightarrow \alpha \in [b] \Rightarrow \alpha \sim b$.

(iii) Ισοδυναμία

Αρκεί ν.δ.ο. $a \sim b \Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$

$\Rightarrow$) Αν $a \sim b$ τότε όπως είδαμε πριν
$[a] = [b]$ άρα η $[a] \cap [b] = [a] \neq \emptyset$

$\Leftarrow$) Αν $[a] \cap [b] \neq \emptyset$
τότε υπάρχει $x \in [a] \cap [b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [a] \\ x \in [b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \sim a \\ x \sim b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \sim x \\ x \sim b \end{cases} \Rightarrow a \sim b.$$